Zadatak 221 (Fric, maturant strukovne škole)

Zadana je kvadratna jednadžba $m \cdot x^2 - 5 \cdot x - (m+1) = 0.$ Jedno rješenje jednadžbe je 3. Koje je drugo rješenje te jednadžbe?

$$A. -3 \qquad B. -\frac{1}{2} \qquad C. 1 \qquad D. \frac{3}{2}$$

Rješenje 221

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

(a ≠ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

www.halapa.com

Budući da je x = 3 jedno rješenje kvadratne jednadžbe, uvrstit ćemo ga u nju i izračunati m.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ m \cdot x^2 - 5 \cdot x - (m+1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - (m+1) = 0 \Rightarrow 9 \cdot m - 15 - m - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot m - m = 15 + 1 \Rightarrow 8 \cdot m = 16 \Rightarrow 8 \cdot m = 16 \; /:8 \Rightarrow m = 2.$$

Dakle, jednadžba ima oblik:

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \\ m \cdot x^2 - 5 \cdot x - (m+1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0.$$

Drugo rješenje možemo odrediti na više načina.

1.inačica

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \\ a = 2 \; , \; b = -5 \; , \; c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 2 \; , \; b = -5 \; , \; c = -3 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{5+7}{4} \\ x_2 = \frac{5-7}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{12}{4} \\ x_2 = -\frac{2}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{12}{4} \\ x_2 = -\frac{2}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = -5 \ , \ c = -3 \\ x_1 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \Rightarrow 3 + x_2 = -\frac{-5}{2} \Rightarrow 3 + x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} - 3 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{5-6}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica

$$\left.\begin{matrix} 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = -5 \ , \ c = -3 \\ x_1 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow 3 \cdot x_2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow 3 \cdot x_2 = \frac{-3}{2} \ / \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod B.



4.inačica

Ponuđene brojeve pod A., B., C. i D. uvrstimo u jednadžbu $2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0$ i tako otkrijemo traženo rješenje.

www.halapa.com

$$A.\ x = -3 \Rightarrow \left[2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \right] \Rightarrow 2 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 9 + 15 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 + 15 - 3 = 0 \Rightarrow 30 \neq 0 \text{ nije rješenje}.$$

$$B.\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0 \right] \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{6}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{6}{2} - 3 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ je rjršenje}.$$

Odgovor je pod B.

Za C. i D. ne moramo provjeravati jer od 4 ponuđena odgovora **samo jedan** mora biti točan.

Vježba 221

Zadana je kvadratna jednadžba $m \cdot x^2 - 5 \cdot x - (m+1) = 0$. Jedno rješenje jednadžbe je $-\frac{1}{2}$.

Koje je drugo rješenje te jednadžbe?

$A.\ 3 \qquad B.\ \frac{1}{2} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ \frac{3}{2}$

Rezultat: A.

Zadatak 222 (Ljilja, ekonomska škole)

Odredite sva realna rješenja jednadžbe $\left(x^3-3\right)^2-3\cdot\left(x^3-3\right)-10=0.$

Rješenje 222

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\left(x^3-3\right)^2-3\cdot\left(x^3-3\right)-10=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ x^3-3=t \end{bmatrix} \Rightarrow t^2-3\cdot t-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2-3\cdot t-10=0 \\ a=1 \ , \ b=-3 \ , \ c=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \ , \ b=-3 \ , \ c=-10 \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm 7}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{3+7}{2} \\ t_2=\dfrac{3-7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{10}{2} \\ t_2=-\dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{10}{2} \\ t_2=-\dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=5 \\ t_2=-2 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

- $$\left.\begin{array}{l} t=5 \\ x^3-3=t \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3=5 \Rightarrow x^3=5+3 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x^3=8 \ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x_1=\sqrt[3]{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=2 \text{ realno rješenje}$$

- $$\left.\begin{array}{l} t=-2 \\ x^3-3=t \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3=-2 \Rightarrow x^3=-2+3 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x^3=1 \ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=1 \text{ realno rješenje.}$$

2.inačica

$$\left(x^3-3\right)^2-3\cdot\left(x^3-3\right)-10=0 \Rightarrow \left(x^3\right)^2-2\cdot 3\cdot x^3+9-3\cdot x^3+9-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3\right)^2-6\cdot x^3+9-3\cdot x^3+9-10=0 \Rightarrow \left(x^3\right)^2-9\cdot x^3+8=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ x^3=t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-9\cdot t+8=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2-9\cdot t+8=0 \\ a=1 \ , \ b=-9 \ , \ c=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \ , \ b=-9 \ , \ c=8 \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{9\pm7}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{9+7}{2} \\ t_2=\frac{9-7}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{16}{2} \\ t_2=\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{16}{2} \\ t_2=\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=8 \\ t_2=1\end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

- $\left.\begin{array}{l} t=8 \\ x^3=t\end{array}\right\} \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x^3=8\ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x_1=\sqrt[3]{8} \Rightarrow x_1=2$ realno rješenje
- $\left.\begin{array}{l} t=1 \\ x^3=t\end{array}\right\} \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x^3=1\ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{1} \Rightarrow x_2=1$ realno rješenje.

Vježba 222

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 223 (Ivana, gimnazija)

Four different straight lines go through the origin of the co-ordinate-system. They intersect the parabola $y = x^2 - 2$ at eight points. What could be the product of the x-co-ordinates of these eight points?

A. only 16 *B*. only −16 *C*. only 8 *D*. only −8

E. There is more than one possible value.

www.halapa.com

Rješenje 223

Ponovimo!

$$a^2 \ge 0\ ,\ a \in R \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a \ne 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

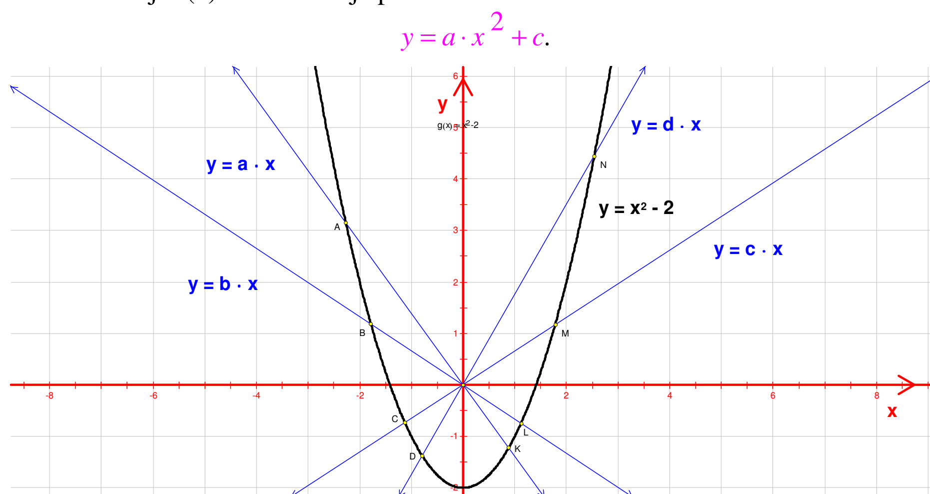
- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Graf linearne funkcije je pravac koji ima jednadžbu

$$y=k\cdot x,$$

gdje je k koeficijent smjera.
Graf kvadratne funkcije f(x) = a · x^2 + c je parabola

$$y = a \cdot x^2 + c.$$



Presjek pravca y = k · x i parabole y = x^2 – 2 dobije se kao rješenje sustava jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2 \\ y = k \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow x^2 - 2 = k \cdot x \Rightarrow x^2 - k \cdot x - 2 = 0.$$

Primijetimo da je diskriminanta kvadratne jednadžbe uvijek pozitivan broj za svaki realan broj k. Jednadžba ima različita realna rješenja.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - k \cdot x - 2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -k \ , \ c = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right] \Rightarrow D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow D = k^2 + 8 > 0.$$

www.halapa.com

Uočimo da za svaku kvadratnu jednadžbu oblika

$$x^2 - k \cdot x - 2 = 0$$

za njezina rješenja x_1 i x_2 vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - k \cdot x - 2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -k \ , \ c = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{1} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -2.$$

Za rješenja četiriju kvadratnih jednadžba tog oblika tada vrijedi:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2) = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4 = 16.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 223

Three different straight lines go through the origin of the co-ordinate-system. They intersect the parabola y = x^2 – 2 at six points. What could be the product of the x-co-ordinates of these six points?

A. only 16 *B*. only −16 *C*. only 8 *D*. only −8

E. There is more than one possible value.

Rezultat: D.

Zadatak 224 (Dominik, gimnazija)

Odredite sve realne brojeve x za koje je $\left(x^2-7\cdot x+11\right)^{x^2-13\cdot x+42}=1.$

Rješenje 224

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

$$1^n=1\ ,\ n\in R \quad , \quad a^\circ=1\ ,\ a\neq 0 \quad , \quad (-1)^{2\cdot n}=1\ ,\ n\in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Zadatak ćemo podijeliti na tri slučaja.
Prvi slučaj
Pretpostavimo da je baza jednaka 1.

$$1^n=1\ ,\ n\in R.$$

$$\left(x^2-7\cdot x+11\right)^{x^2-13\cdot x+42}=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-7\cdot x+11 \text{ baza} \\ x^2-13\cdot x+42 \text{ eksponent} \end{array}\right\}.$$

www.halapa.com

Slijedi:

$$x^2-7\cdot x+11=1 \Rightarrow x^2-7\cdot x+11-1=0 \Rightarrow x^2-7\cdot x+10=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x-5\cdot x+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow \left(x^2-2\cdot x\right)+(-5\cdot x+10) \Rightarrow x\cdot(x-2)-5\cdot(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot(x-5) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=5 \end{array}\right\}.$$

Drugi slučaj
Pretpostavimo da je eksponent jednak 0, a baza različita od 0.

$$a^\circ=1\ ,\ a\neq 0.$$

$$\left(x^2-7\cdot x+11\right)^{x^2-13\cdot x+42}=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-7\cdot x+11 \text{ baza} \\ x^2-13\cdot x+42 \text{ eksponent} \end{array}\right\}.$$

Slijedi:

$$x^2-13\cdot x+42=0 \Rightarrow x^2-6\cdot x-7\cdot x+42=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2-6\cdot x\right)+(-7\cdot x+42)=0 \Rightarrow x\cdot(x-6)-7\cdot(x-6)=0 \Rightarrow (x-6)\cdot(x-7)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-6=0 \\ x-7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=6 \\ x_4=7 \end{array}\right\}.$$

Moramo se uvjeriti da je za brojeve 6 i 7 izraz $x^2 - 7 \cdot x + 11$ različit od 0.

$$x^2 - 7 \cdot x + 11 = \left[\, x = 6 \,\right] = 6^2 - 7 \cdot 6 + 11 = 36 - 42 + 11 = 5 \neq 0.$$

$$x^2 - 7 \cdot x + 11 = \left[\, x = 7 \,\right] = 7^2 - 7 \cdot 7 + 11 = 49 - 49 + 11 = 11 \neq 0.$$

Treći slučaj
Pretpostavimo da je baza jednaka – 1. Tada eksponent mora biti paran broj.

$$(-1)^{2 \cdot n} = 1 \;,\; n \in N.$$

$$\left(x^2 - 7 \cdot x + 11\right)^{x^2 - 13 \cdot x + 42} = 1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x^2 - 7 \cdot x + 11 \text{ baza} \\ x^2 - 13 \cdot x + 42 \text{ eksponent} \end{matrix}\right\}.$$

Slijedi:

$$x^2 - 7 \cdot x + 11 = -1 \;\Rightarrow\; x^2 - 7 \cdot x + 11 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 7 \cdot x + 12 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x^2 - 3 \cdot x - 4 \cdot x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{matrix}\right] \;\Rightarrow\; \left(x^2 - 3 \cdot x\right) + \left(-4 \cdot x + 12\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (x - 3) - 4 \cdot (x - 3) = 0 \;\Rightarrow\; (x - 3) \cdot (x - 4) = 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x - 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x_5 = 3 \\ x_6 = 4 \end{matrix}\right\}.$$

Provjerimo je li za brojeve 3 i 4 izraz $x^2 - 13 \cdot x + 42$ paran broj.

$$x^2 - 13 \cdot x + 42 = \left[\begin{matrix} x = 3 \\ x = 4 \end{matrix}\right] = \left.\begin{matrix} 3^2 - 13 \cdot 3 + 42 = 9 - 39 + 42 = 12 \text{ paran broj} \\ 4^2 - 13 \cdot 4 + 42 = 16 - 52 + 42 = 6 \text{ paran broj} \end{matrix}\right\}.$$

Dakle, ima šest rješenja:

2, 3, 4, 5, 6, 7.

www.halapa.com

Vježba 224

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 225 (Rocky, maturant)

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $81 \cdot x^2 = 1$.

$$A.\; -\frac{1}{9} \qquad B.\; -\frac{1}{81} \qquad C.\; \frac{1}{81} \qquad D.\; \frac{1}{9}$$

Rješenje 225

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

(a ≠ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

1.inačica

$$81 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow 81 \cdot x^2 = 1 \; / : 81 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{81} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{81} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{81}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{9} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{9} \\ x_2 = -\frac{1}{9} \end{matrix} \right\}.$$

Umnožak rješenja iznosi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{9} \right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{81}.$$

Odgovor je pod B.

1.inačica

Rabimo Vièteovu formulu:

$$81 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow 81 \cdot x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} 81 \cdot x^2 - 1 = 0 \\ a = 81 \; , \; b = 0 \; , \; c = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{81} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{81}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 225

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $9 \cdot x^2 = 1$.

$A. \; -\frac{1}{9}$ $\qquad B. \; -\frac{1}{81}$ $\qquad C. \; \frac{1}{81}$ $\qquad D. \; \frac{1}{9}$

Rezultat: A.

www.halapa.com

Zadatak 226 (Tessa, maturantica)

Riješite jednadžbu $\sqrt[3]{x} + 0.25 = \sqrt[6]{x}.$

Rješenje 226

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^r = \sqrt[n]{a^r} \quad , \quad \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a \; , \; a \ge 0.$$

$$\sqrt[3]{x} + 0.25 = \sqrt[6]{x} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zamjena} \\ \sqrt[6]{x} = t \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{matrix} \right] \Rightarrow t^2 + 0.25 = t \Rightarrow t^2 - t + 0.25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} t^2 - t + 0.25 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = -1 \; , \; c = 0.25 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 1 \; , \; b = -1 \; , \; c = 0.25 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm 0}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vraćamo se zamjeni.

$$\left.\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ \sqrt[6]{x} = t \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[6]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[6]{x} = \frac{1}{2} \, / ^6 \Rightarrow \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow x = \frac{1}{64}.$$

Vježba 226

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 227 (Martina, maturantica)

Pokažite da su rješenja jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0$ recipročni brojevi.

Rješenje 227

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Dva su broja recipročna ako im je umnožak jednak jedan.

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

1.inačica

Pretpostavimo da je x jedno rješenje jednadžbe. Tada je i $\frac{1}{x}$ njezino rješenje jer se zamjenom $x = \frac{1}{y}$ dobije ista jednadžba.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0 \Rightarrow \left[x = \frac{1}{y} \right] \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{y} + a = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{y^2} + b \cdot \frac{1}{y} + a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \frac{1}{y^2} + b \cdot \frac{1}{y} + a = 0 \; / \cdot y^2 \Rightarrow a + b \cdot y + a \cdot y^2 = 0 \Rightarrow a \cdot y^2 + b \cdot y + a = 0.$$

2.inačica

Uporabom Vièteove formule dokazat ćemo da je umnožak rješenja jednak 1, tj. da su ona recipročna.

www.halapa.com

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0 \\ a = a \ , \ b = b \ , \ c = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{a} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

3.inačica

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0 \\ a = a \ , \ b = b \ , \ c = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = a \ , \ b = b \ , \ c = a \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot a}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\}.$$

Umnožak iznosi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-\left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}\right)}{2 \cdot a} \cdot \frac{-\left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}\right)}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \cdot \frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}\right) \cdot \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}\right)}{4 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4 \cdot a^2}\right)^2}{4 \cdot a^2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4 \cdot a^2\right)}{4 \cdot a^2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4 \cdot a^2}{4 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4 \cdot a^2}{4 \cdot a^2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{4 \cdot a^2}{4 \cdot a^2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{4 \cdot a^2}{4 \cdot a^2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

www.halapa.com

Vježba 227

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 228 (Tonka, maturantica)

Riješi sustav: $x + y = 2$ i $x \cdot y - z^2 = 1$.

Rješenje 228

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}.$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x \cdot y - z^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=2-x \\ x \cdot y - z^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow x \cdot (2-x) - z^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x - x^2 - z^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot x - x^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2 \cdot x - 1 - z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2 \cdot x - 1 - z^2 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 + z^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=0 \end{array}\right\}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2-x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2-1 \Rightarrow y = 1.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x, \; y, \; z) = (1, \; 1, \; 0).$$

Vježba 228

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 229 (Tonka, maturantica)

Riješi jednadžbu $5 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 + 8 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y - 2 \cdot x + 2 = 0.$

Rješenje 229

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$5 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 + 8 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y - 2 \cdot x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + x^2 - 2 \cdot x + 1 + y^2 + 2 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow \left(4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2\right) + \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) + \left(y^2 + 2 \cdot y + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2\right) + \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) + \left(y^2 + 2 \cdot y + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-1=0 \\ y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right\}.$$

Rješenje jednadžbe glasi:

$$(x, \; y) = (1, \; -1).$$

www.halapa.com

Vježba 229

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 230 (Tonka, maturantica)

Riješi jednadžbu $(x+5)^4+(x+3)^4=2.$

Rješenje 230

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

$$(a+b)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot b^1+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a^1\cdot b^3+b^4.$$

$$(a-b)^4=a^4-4\cdot a^3\cdot b^1+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a^1\cdot b^3+b^4.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Imaginarna jedinica:

$$i=\sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-a}=i\cdot\sqrt{a} \ , \ a>0.$$

Uvedemo zamjenu.

$$(x+5)^4+(x+3)^4=2 \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{zamjena}\\ x+4=t\end{matrix}\right] \Rightarrow (t+1)^4+(t-1)^4=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4+4\cdot t^3+6\cdot t^2+4\cdot t+1+t^4-4\cdot t^3+6\cdot t^2-4\cdot t+1=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4+4\cdot t^3+6\cdot t^2+4\cdot t+1+t^4-4\cdot t^3+6\cdot t^2-4\cdot t+1=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4+6\cdot t^2+t^4+6\cdot t^2=0 \Rightarrow 2\cdot t^4+12\cdot t^2=0 \Rightarrow 2\cdot t^4+12\cdot t^2=0 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4+6\cdot t^2=0 \Rightarrow t^2\cdot\left(t^2+6\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}t^2=0\\ t^2+6=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}t^2=0\\ t^2=-6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}t^2=0 \ /\sqrt{}\\ t^2=-6 \ /\sqrt{}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}t_{1,2}=0\\ t_{3,4}=\pm\sqrt{-6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}t_{1,2}=0\\ t_{3,4}=\pm\, i\cdot\sqrt{6}\end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na zamjenu:

- $\left.\begin{matrix}t_{1,2}=0\\ x+4=t_{1,2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=-4$
- $\left.\begin{matrix}t_{3,4}=\pm\, i\cdot\sqrt{6}\\ x+4=t_{3,4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+4=\pm\, i\cdot\sqrt{6} \Rightarrow x_{3,4}=-4\pm\, i\cdot\sqrt{6}.$

Vježba 230

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com

Zadatak 231 (Kiki, gimnazija)

Riješi jednadžbu $x^4 - 8 \cdot x + 63 = 0 \;,\; x \in C.$

Rješenje 231

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Imaginarna jedinica:

$$i = \sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a} \;,\; a > 0.$$

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^4 - 8 \cdot x + 63 = 0 \;\Rightarrow\; x^4 + 16 \cdot x^2 + 64 - 16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4 + 16 \cdot x^2 + 64\right) - \left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(x^2 + 8\right)^2 - (4 \cdot x + 1)^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 8\right)^2 = (4 \cdot x + 1)^2 \;\Rightarrow\; \left(x^2 + 8\right)^2 = (4 \cdot x + 1)^2 \; / \sqrt{\;} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(x^2 + 8\right)^2} = \sqrt{(4 \cdot x + 1)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|x^2 + 8\right| = |4 \cdot x + 1| \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2 + 8 = 4 \cdot x + 1 \\ x^2 + 8 = -(4 \cdot x + 1) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2 + 8 - 4 \cdot x - 1 = 0 \\ x^2 + 8 + 4 \cdot x + 1 = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \cdot x + 7 = 0 \\ x^2 + 4 \cdot x + 9 = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \text{malo bolje džepno} \\ \text{računalo} \end{array}\right] \;\Rightarrow\; \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \cdot i \\ x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{5} \cdot i \end{array}\right\}.$$

Vježba 231

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 232 (Filip, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n \cdot (n-1)$, gdje je n realan broj, $n \neq -1$, $n \neq 2$.

Rješenje 232

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

www.halapa.com

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Preoblikujemo jednadžbu.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=n\cdot(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}-2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}=n\cdot(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=n\cdot(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=n\cdot(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}-n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x\cdot(x-1)+x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}\right)^2-\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}-n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2-x+x^2+x}{x^2-1}\right)^2-\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}-n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2-x+x^2+x}{x^2-1}\right)^2-\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}-n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow \left(\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}-n\cdot(n-1)=0.$$

Uvedemo zamjenu

$$t=\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}.$$

Dalje slijedi:

www.halapa.com

$$t^2-t-n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2-t-n\cdot(n-1)=0 \\ a=1 \;,\; b=-1 \;,\; c=-n\cdot(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-1 \;,\; c=-n\cdot(n-1) \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-n\cdot(n-1))}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot n\cdot(n-1)}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot n^2-4\cdot n}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4\cdot n^2-4\cdot n+1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(2\cdot n-)^2}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm|2\cdot n-1|}{2}.$$

Sada je:

- $$2\cdot n-1\geq 0 \Rightarrow |2\cdot n-1|=2\cdot n-1 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm(2\cdot n-1)}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1+2\cdot n-1}{2} \\ t_2=\dfrac{1-2\cdot n+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1+2\cdot n-1}{2} \\ t_2=\dfrac{2-2\cdot n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{2\cdot n}{2} \\ t_2=\dfrac{2\cdot(1-n)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{2\cdot n}{2} \\ t_2=\dfrac{2\cdot(1-n)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=n \\ t_2=1-n \end{array}\right\}.$$

- $$2\cdot n-1<0 \Rightarrow |2\cdot n-1|=-(2\cdot n-1)=-2\cdot n+1 \Rightarrow t_{3,4}=\frac{1\pm(-2\cdot n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=\dfrac{1-2\cdot n+1}{2} \\ t_4=\dfrac{1-(-2\cdot n+1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=\dfrac{2-2\cdot n}{2} \\ t_4=\dfrac{1+2\cdot n-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=\dfrac{2\cdot(1-n)}{2} \\ t_4=\dfrac{1+2\cdot n-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=\dfrac{2\cdot(1-n)}{2} \\ t_4=\dfrac{2\cdot n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=\dfrac{2\cdot(1-n)}{2} \\ t_4=\dfrac{2\cdot n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_3=1-n \\ t_4=n \end{array}\right\}.$$

Rješenja su:

$$t_1=n \quad , \quad t_2=1-n.$$

Vraćamo se zamjeni:

- $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2\cdot x^2}{x^2-1}=t \\ t=n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\cdot x^2}{x^2-1}=n \Rightarrow \frac{2\cdot x^2}{x^2-1}=n \;/\cdot\left(x^2-1\right) \Rightarrow 2\cdot x^2=n\cdot\left(x^2-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2=n\cdot x^2-n \Rightarrow n\cdot x^2-n=2\cdot x^2 \Rightarrow n\cdot x^2-2\cdot x^2=n \Rightarrow (n-2)\cdot x^2=n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2)\cdot x^2=n \;/\cdot\frac{1}{n-2} \Rightarrow x^2=\frac{n}{n-2} \Rightarrow x^2=\frac{n}{n-2} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

www.halapa.com

- $$\left.\begin{array}{l}\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}=t\\ t=1-n\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\cdot x^2}{x^2-1}=1-n \Rightarrow \frac{2\cdot x^2}{x^2-1}=1-n \;/\cdot\left(x^2-1\right) \Rightarrow 2\cdot x^2=(1-n)\cdot\left(x^2-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2=x^2-1-n\cdot x^2+n \Rightarrow 2\cdot x^2-x^2+n\cdot x^2=-1+n \Rightarrow x^2+n\cdot x^2=n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+n)\cdot x^2=n-1 \Rightarrow (n+1)\cdot x^2=n-1 \;/\cdot\frac{1}{n+1} \Rightarrow x^2=\frac{n-1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{n-1}{n+1} \;/\sqrt{} \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Vježba 232

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 233 (Maturantica, gimnazija)

Skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4 je:

$$A.\ \langle 0, 6\rangle \qquad B.\ \langle 3, +\infty\rangle \qquad C.\ \langle -\infty, 5\rangle \qquad D.\ \langle 5, +\infty\rangle$$

Rješenje 233

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$a>b \ , \ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \quad , \quad 0<a<b \Rightarrow a^2<b^2.$$

www.halapa.com

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = - x$.

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-b \quad , \quad x_1\cdot x_2=c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A \cap B$.

Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 6 \ , \ c = q \end{array} \right\}.$$

Jednadžba ima realne različite korijene pa vrijedi:

$$D > 0 \Rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \Rightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot q > 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot q > 0 \Rightarrow -4 \cdot q > -36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot q > -36 \ / : (-4) \Rightarrow q < 9 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 9 \rangle.$$

Preoblikujemo nejednakost $|x_1 - x_2| > 4$.

$$|x_1 - x_2| > 4 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2} > 4 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2} > 4 \ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2}\right)^2 > 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 > 16 \Rightarrow x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 > 16 \Rightarrow x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow$$

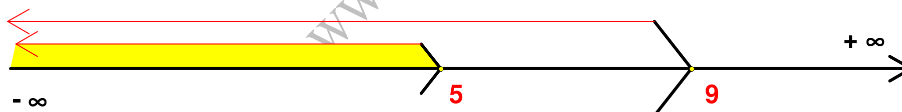
$$\Rightarrow \left(x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2\right) - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^2 - 4 \cdot q > 16 \Rightarrow 36 - 4 \cdot q > 16 \Rightarrow -4 \cdot q > 16 - 36 \Rightarrow -4 \cdot q > -20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot q > -20 \ / : (-4) \Rightarrow q < 5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle.$$

Konačno rješenje je presjek skupova:

$$\langle -\infty, 9 \rangle \cap \langle -\infty, 5 \rangle = \langle -\infty, 5 \rangle.$$



Odgovor je pod C.

Vježba 233

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 234 (Matrix, gimnazija)

Riješite jednadžbu $32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 5 = 0.$

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Ako je racionalni broj $\frac{p}{q}$ $(p, q$ cijeli brojevi i $q \neq 0)$ korijen (rješenje) jednadžbe

www.halapa.com

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_\circ = 0 \;,\; a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0 i q djelitelj vodećeg koeficijenta a_n. Korisno je algebarskoj jednadžbi pridružiti polinom

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_\circ .$$

Svaki korijen te jednadžbe jest nultočka tog polinoma i obrnuto.

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

1.inačica

Preoblikujemo jednadžbu.

$$32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 5 = 0 \Rightarrow 32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 - 28 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2\right) + \left(-28 \cdot x^2 + 21 \cdot x\right) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(16 \cdot x^4 - 24 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2\right) - 7 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 3 \cdot x\right) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\left(4 \cdot x^2\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot 3 \cdot x + (3 \cdot x)^2\right) - 7 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 3 \cdot x\right) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 3 \cdot x\right)^2 - 7 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 3 \cdot x\right) + 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zamjena} \\ 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = t \end{matrix}\right] \Rightarrow 2 \cdot t^2 - 7 \cdot t + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot t^2 - 7 \cdot t + 5 = 0 \\ a = 2 \;,\; b = -7 \;,\; c = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{malo bolje} \\ \text{džepno računalo} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

- $$\left.\begin{matrix} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = t \\ t = \frac{5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = \frac{5}{2} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = \frac{5}{2} \;/ \cdot 2 \Rightarrow 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x = 5 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 5 = 0 \\ a = 8 \;,\; b = -6 \;,\; c = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{malo bolje} \\ \text{džepno računalo} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{5}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

- $$\left.\begin{matrix} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = t \\ t = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 1 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0 \\ a = 4 \;,\; b = -3 \;,\; c = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{malo bolje}\\ \text{džepno računalo}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_4 = -\frac{1}{4}\end{array}\right\}.$$

2.inačica

Promatramo jednadžbu

$$32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 5 = 0.$$

Djelitelji slobodnog člana **5** jesu

$$p = 1, -1, 5, -5.$$

Djelitelji vodećeg koeficijenta **32** jesu

$$q = 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8, 16, -16, 32, -32.$$

Ako jednadžba ima racionalni korijen, onda je to jedan od ovih brojeva:

$$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{5}{16}, -\frac{5}{16}, \frac{5}{32}, -\frac{5}{32}.$$

Označimo li

$$f(x) = 32 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 5,$$

nalazimo nakon mukotrpnog postupka uz veliku pomoć redom:

$$f(1) = 32 \cdot 1^4 - 48 \cdot 1^3 - 10 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,$$

$$f(-1) = 32 \cdot (-1)^4 - 48 \cdot (-1)^3 - 10 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot (-1) + 5 = 54 \neq 0,$$

$$\ldots$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 21 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2},$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 32 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 - 48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 21 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 5 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\ldots$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 32 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 - 48 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 10 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 21 \cdot \frac{5}{4} + 5 = 0 \Rightarrow x_4 = \frac{5}{4}.$$

www.halapa.com

Vježba 234

Riješite jednadžbu $2 \cdot x^3 - x^2 + 10 \cdot x - 5 = 0.$

Rezultat: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = i \cdot \sqrt{5}$, $x_3 = -i \cdot \sqrt{5}.$

Zadatak 235 (FreeplayerHD, srednja škola)

Riješite jednadžbu $x^3 - x^2 - 18 = 0.$

Rješenje 235

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a} \;\; , \;\; a > 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$x^3 - x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 27 + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - 27 - x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3 - 27\right) - \left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow \left(x^3 - 3^3\right) - \left(x^2 - 3^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3) \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x + 3^2\right) - (x-3) \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow (x-3) \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x + 9\right) - (x-3) \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3) \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x + 9 - (x+3)\right) = 0 \Rightarrow (x-3) \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x + 9 - x - 3\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 6\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 3 = 0 \\ x^2 + 2 \cdot x + 6 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Prva jednadžba je linearna.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Druga jednadžba je kvadratna.

$$x^2 + 2 \cdot x + 6 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + 2 \cdot x + 6 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 6 \\ x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4 \cdot 5}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4} \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm 2 \cdot i \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{2 \cdot \left(-1 \pm i \cdot \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{2 \cdot \left(-1 \pm i \cdot \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow x_{2,3} = -1 \pm i \cdot \sqrt{5}.$$

Vježba 235

Riješite jednadžbu $x^3 - x^2 - 4 = 0.$

Rezultat: $x_1 = 2 \ , \ x_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \ , \ x_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}.$

Zadatak 236 (3gamers, maturanti)

Nađite $\sqrt[3]{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$, gdje su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $\frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 9 \cdot \sqrt{3} = 0.$

$$A. -3 \qquad B. -\frac{1}{3} \qquad C. \frac{1}{3} \qquad D. 3$$

Rješenje 236

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

www.halapa.com

(a ≠ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}+9\cdot\sqrt{3}=0\Rightarrow\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}+9\cdot\sqrt{3}=0\ /\cdot\sqrt{3}\Rightarrow x^2+x+9\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x+9\cdot 3=0\Rightarrow x^2+x+27=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2+x+27=0\\a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=27\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{matrix}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1+x_2=-\frac{1}{1}\\x_1\cdot x_2=\frac{27}{1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1+x_2=-1\\x_1\cdot x_2=27\end{matrix}\right\}.$$

Konačno je

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}=\sqrt[3]{\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}}=\sqrt[3]{\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}=-\frac{1}{3}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 236

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com

Zadatak 237 (Davor, gimnazija)

Riješite jednadžbu $x^6-35\cdot x^3+216=0$.

Rješenje 237

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

$$x^6-35\cdot x^3+216=0\Rightarrow\left(x^3\right)^2-35\cdot x^3+216=0\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{zamjena}\\x^3=t\end{matrix}\right]\Rightarrow t^2-35\cdot t+216=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}t^2-35\cdot t+216=0\\a=1\ ,\ b=-35\ ,\ c=216\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=1\ ,\ b=-35\ ,\ c=216\\t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \text{[calculator icon]}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 8 \\ t_2 = 27 \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

- $$\left.\begin{matrix} x^3 = t \\ t = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 2^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 4\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 2 = 0 \\ x^2 + 2\cdot x + 4 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Prva jednadžba

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.$$

Druga jednadžba

$$x^2 + 2\cdot x + 4 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + 2\cdot x + 4 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 4 \\ x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = -1 + \sqrt{3}\cdot i \\ x_3 = -1 - \sqrt{3}\cdot i \end{matrix}\right\}.$$

- $$\left.\begin{matrix} x^3 = t \\ t = 27 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x^3 - 3^3 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 3^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 9\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 3 = 0 \\ x^2 + 3\cdot x + 9 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

Prva jednadžba

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x_4 = 3.$$

Druga jednadžba

$$x^2 + 3\cdot x + 9 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + 3\cdot x + 9 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 3 \ , \ c = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = 3 \ , \ c = 9 \\ x_{5,6} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_5 = \dfrac{-3 + 3\cdot\sqrt{3}\cdot i}{2} \\ x_6 = \dfrac{-3 - 3\cdot\sqrt{3}\cdot i}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 237

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 238 (112, maturant)

Napišite neku kvadratnu jednadžbu čija su rješenja različita i jedno je pet puta veće od drugoga.

Rješenje 238

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Množenje zagrada

$$\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^{2}+b\cdot x+c=0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a\cdot\left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)=0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.

Primjer 1

$$\left.\begin{matrix} x_{1}=1 \\ x_{2}=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet ispunjen} \\ x_{2}=5\cdot x_{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)=0 \Rightarrow \left(x-1\right)\cdot\left(x-5\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{2}-5\cdot x-x+5=0 \Rightarrow x^{2}-6\cdot x+5=0.$$

Primjer 2

$$\left.\begin{matrix} x_{1}=\frac{1}{2} \\ x_{2}=\frac{5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet ispunjen} \\ x_{2}=5\cdot x_{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{2}-\frac{5}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{4}=0 \Rightarrow x^{2}-\frac{5}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{4}=0 \,/\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot x^{2}-10\cdot x-2\cdot x+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^{2}-12\cdot x+5=0.$$

Primjer 3

$$\left.\begin{matrix} x_{1}=n \\ x_{2}=5\cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet ispunjen} \\ x_{2}=5\cdot x_{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)=0 \Rightarrow \left(x-n\right)\cdot\left(x-5\cdot n\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{2}-5\cdot n\cdot x-n\cdot x+5\cdot n^{2}=0 \Rightarrow x^{2}-6\cdot n\cdot x+5\cdot n^{2}=0.$$

Možemo u općenitom obliku napisati

$$a\cdot\left(x^{2}-6\cdot n\cdot x+5\cdot n^{2}\right)=0,\ a\neq 0,\ n\neq 0.$$

Vježba 238

Napišite neku kvadratnu jednadžbu čija su rješenja različita i jedno je tri puta veće od drugoga.

Rezultat: $a\cdot\left(x^{2}-4\cdot n\cdot x+3\cdot n^{2}\right)=0,\ a\neq 0,\ n\neq 0.$

Zadatak 239 (Fox, maturant)

Za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 - k \cdot x + k - 3 = 0$ vrijedi da je $x_{1}^{2}+x_{2}^{2}=14$. Odredite vrijednost realnoga broja k.

Rješenje 239

Ponovimo!

$$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \Rightarrow a^{2}+b^{2}=\left(a+b\right)^{2}-2\cdot a\cdot b.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}.$$

www.halapa.com

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$x^2 - k \cdot x + k - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x^2 - k \cdot x + k - 3 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -k \;,\; c = k - 3 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left[\begin{matrix} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{matrix}\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -\frac{-k}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{k-3}{1} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = k - 3 \end{matrix}\right\}.$$

Iz uvjeta u zadatku slijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 = 14 \;\Rightarrow\; x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 14 \;\Rightarrow\; \left(x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2\right) - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 14 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 14 \;\Rightarrow\; \left[\begin{matrix} x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = k - 3 \end{matrix}\right] \;\Rightarrow\; k^2 - 2 \cdot (k - 3) = 14 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - 2 \cdot k + 6 = 14 \;\Rightarrow\; k^2 - 2 \cdot k + 6 - 14 = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - 2 \cdot k - 8 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k^2 - 2 \cdot k - 8 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -2 \;,\; c = -8 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -2 \;,\; c = -8 \\ k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} k_1 = -2 \\ k_2 = 4 \end{matrix}\right\}.$$

Ili

$$k^2 - 2 \cdot k - 8 = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - 4 \cdot k + 2 \cdot k - 8 = 0 \;\Rightarrow\; \left(k^2 - 4 \cdot k\right) + (2 \cdot k - 8) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot (k - 4) + 2 \cdot (k - 4) = 0 \;\Rightarrow\; (k - 4) \cdot (k + 2) = 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} k - 4 = 0 \\ k + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} k_1 = 4 \\ k_2 = -2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 239

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 240 (Jure, ekonomska škola)

U jednadžbi $x^2 - 12 \cdot x + c = 0$ jedno rješenje dvostruko je veće od drugoga. Odredite c.

A. 144 *B.* 36 *C.* 32 *D.* −24

Rješenje 240

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

www.halapa.com

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Najprije izračunamo x_1 i x_2.

$$x^2 - 12 \cdot x + c = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 12 \cdot x + c = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -12 \ , \ c = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{-12}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ x_2 = 2 \cdot x_1 \end{array} \right] \Rightarrow x_1 + 2 \cdot x_1 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x_1 = 12 \Rightarrow 3 \cdot x_1 = 12 \ /:3 \Rightarrow x_1 = 4.$$

Računamo x_2.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \cdot x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 2 \cdot 4 \Rightarrow x_2 = 8.$$

Sada je

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 4 \cdot 8 = \frac{c}{1} \Rightarrow 32 = c \Rightarrow c = 32.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 240

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com